



ce
pre
UNI

Aritmética

NÚMEROS RACIONALES

CICLO
preuniversitario
2023-2



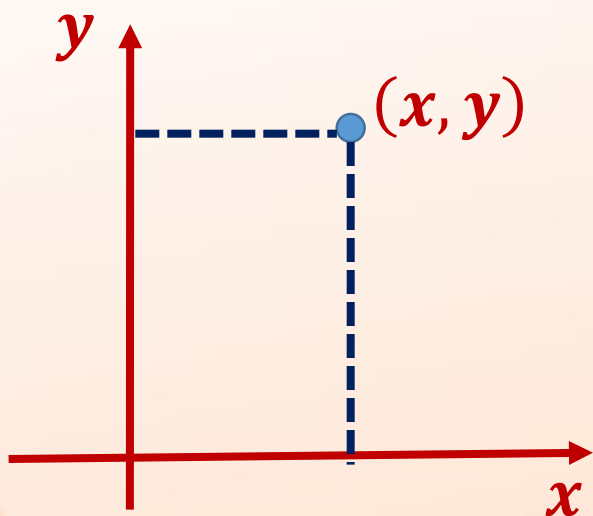
REPRESENTACIÓN DE UNA RELACIÓN

Dado un conjunto $A \neq \emptyset$, las relaciones binarias $R \subset A \times A$, se pueden representar de 3 maneras:

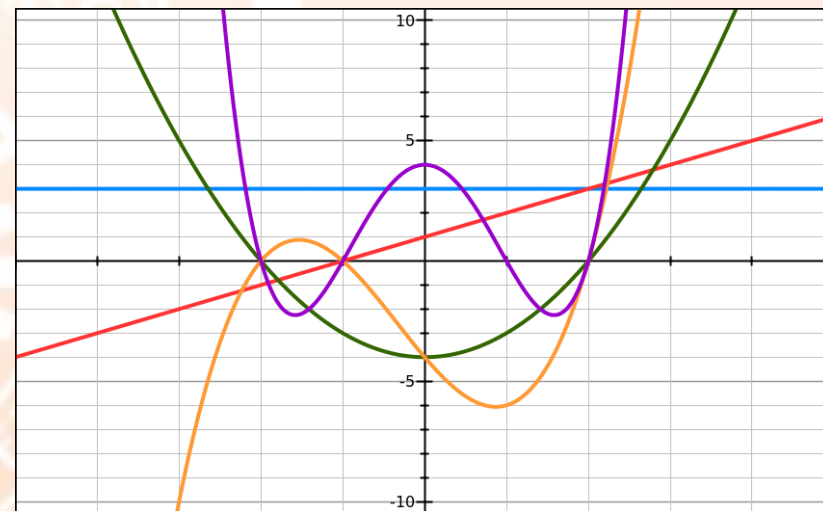
1) Pares ordenados

$$R = \{(a, b): a \in A, b \in A\}$$

En caso $A \subset \mathbb{R}$, la relación R puede ser ubicado sobre el plano cartesiano, como muestra el siguiente dibujo



En particular, esta representación permite graficar las funciones.



2) Flechas (dígrafos)

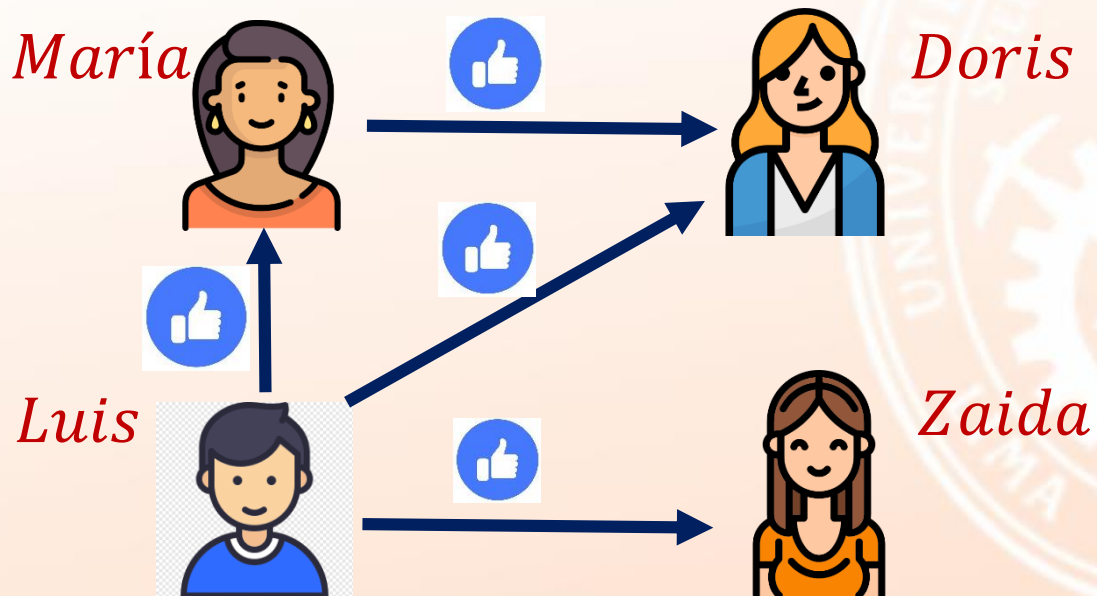
2.1) Si $x \neq y$, entonces (x, y) se representa como



2.2) Si $x = y$, entonces (x, x) se representa como



Ejemplo: Sean 4 personas



Dado el conjunto A formado por las 4 personas, la representación de la relación R se escribe como

$$R = \{(Luis, María), (Luis, Doris), (Luis, Zaida), (María, Doris)\}$$

3) Matrices

Para $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, la representación matricial de una relación R permite poder estudiar los dígrafos de manera computacional, usando la matriz de adyacencia M asociada a dicha relación R .

$$M = [a_{ij}] \quad \text{donde} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{si } (v_i, v_j) \in R \\ 0 & , \text{si } (v_i, v_j) \notin R \end{cases}$$

Ejemplo:

Sea el conjunto $A = \{2, 3, 5, 7\}$ y la relación $R = \{(2, 3), (3, 3), (5, 2), (5, 7), (7, 3)\}$

a) La matriz de adyacencia asociada a R es:

$$\begin{array}{c} \mathbf{2} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{7} \\ \mathbf{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{3} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{5} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{7} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Dada la matriz de adyacencia M asociada a R_1

$$M = \begin{array}{c} \mathbf{2} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{7} \\ \mathbf{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{5} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{7} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La relación R_1 es: $R_1 = \{(2, 2), (2, 5), (5, 3), (5, 7)\}$

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

Dado el conjunto $A \neq \emptyset$ y $\mathcal{R}$ una relación definida sobre A . Decimos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia si cumple las siguientes propiedades:

Reflexiva

Para todo $x \in A$ se tiene $(x, x) \in \mathcal{R}$.

Simétrica

Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, entonces $(y, x) \in \mathcal{R}$.

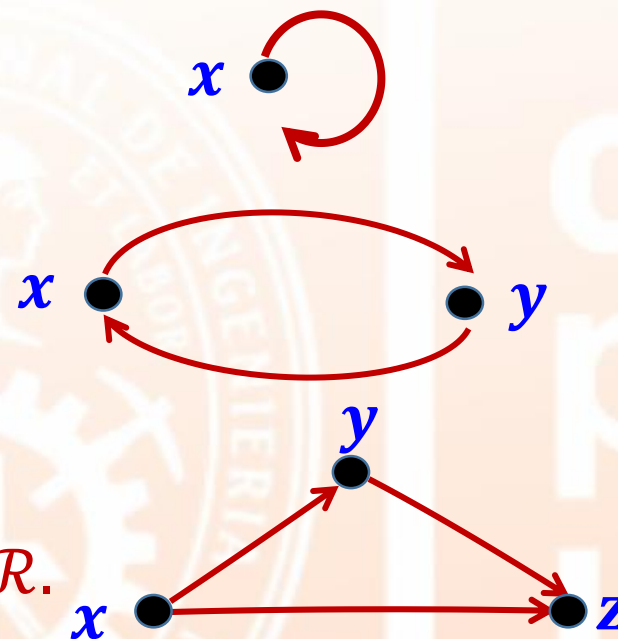
Transitiva

Si $(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{R}$ entonces $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Observación

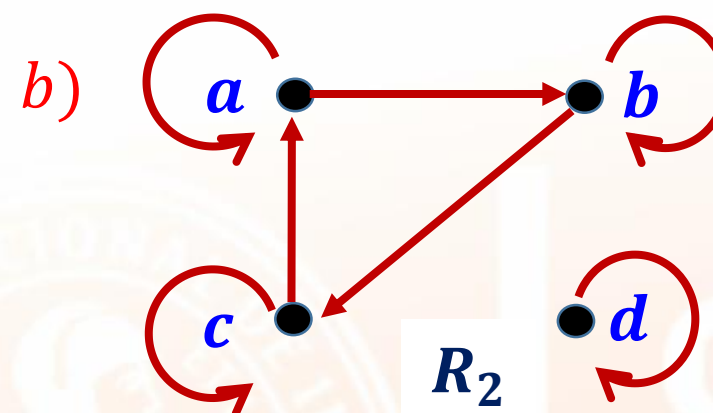
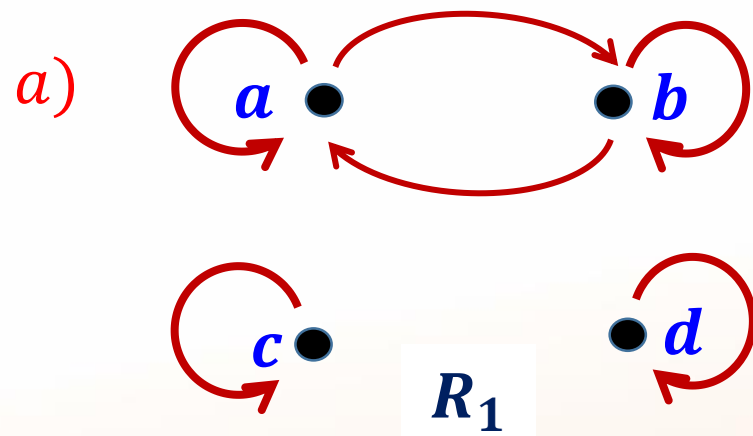
Si alguna de las propiedades mencionadas no se cumple, diremos que dicha relación no es de equivalencia.

Representación con dígrafos



Aplicación 1

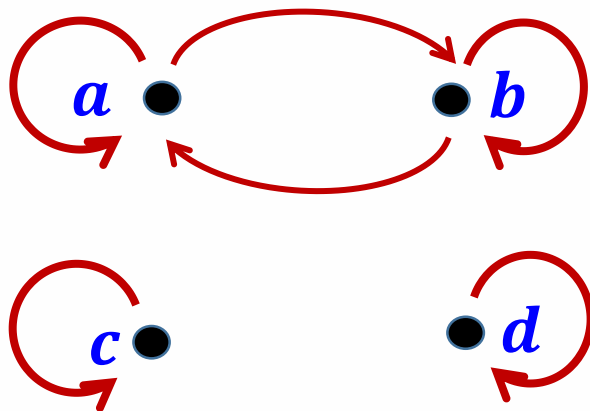
Dada las representaciones gráficas de las relaciones R_1 y R_2 , definidas sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.



Determine por comprensión dichas relaciones e indique la veracidad de las siguientes proposiciones:

- I. R_1 es una relación reflexiva y simétrica.
- II. R_2 es una relación simétrica y transitiva.
- III. R_1 y R_2 no son relaciones de equivalencias.

Resolución



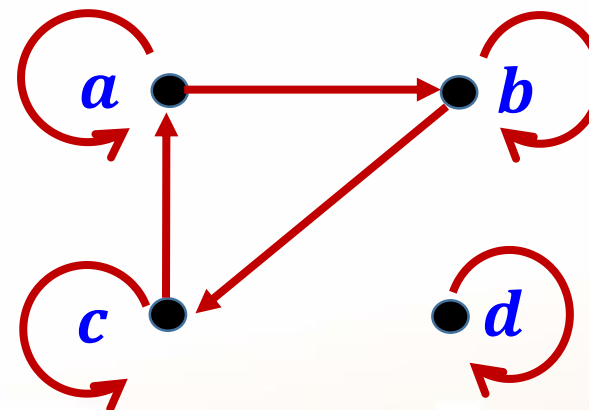
$$R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$$

R_1 es reflexiva

R_1 es simétrica

R_1 es transitiva

R_1 es de equivalencia



$$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c), (c, a), (d, d)\}$$

R_2 es reflexiva

R_2 no es simétrica

pues $(a, b) \in R_2$ pero $(b, a) \notin R_2$

R_2 no es transitiva

R_2 no es de equivalencia

I. R_1 es una relación reflexiva y simétrica. **V**

II. R_2 es una relación no es simétrica ni transitiva. **V**

III. R_1 y R_2 son relaciones de equivalencias. **F**

Aplicación 2

Sea el conjunto $A = \{2,3,5\}$, definamos las siguientes relaciones sobre A :

a) $R_1 = \{(2,2), (3,3)\}$

b) $R_2 = \{(2,2), (5,3), (3,3), (5,5)\}$

c) $R_3 = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (5,5)\}$

Verifique si dichas relaciones son de equivalencia.

Resolución

a) R_1 no es relación de equivalencia

En efecto:



5 ● *No reflexiva*

$$(5,5) \notin R_1$$

b) R_2 no es relación de equivalencia

En efecto:

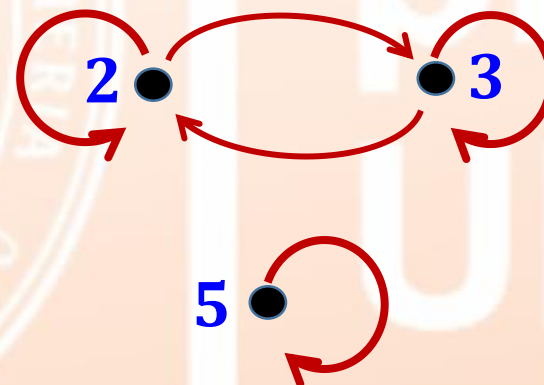


No simétrica

$$(3,5) \notin R_2$$

c) R_3 es relación de equivalencia

En efecto:



Aplicación 3

En el conjunto $A = \mathbb{R}$, definimos la siguiente relación sobre A :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$$

Verifique si dicha relación es de equivalencia.

Resolución

Reflexiva Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $|x| = |x|$ entonces $x\mathcal{R}x$ **$\mathcal{R}$ es reflexiva**

Simétrica Si $x\mathcal{R}y$ entonces $|x| = |y| \Leftrightarrow |y| = |x|$ entonces $y\mathcal{R}x$
 $\mathcal{R}$ es simétrica

Transitiva Si $\underbrace{x\mathcal{R}y} \wedge \underbrace{y\mathcal{R}z}$ entonces $x\mathcal{R}z$ **$\mathcal{R}$ es transitiva**

$$\underbrace{|x| = |y| \quad |y| = |z|}_{|x| = |z|}$$



$\mathcal{R}$ es relación de equivalencia

Aplicación 4

En el conjunto de los números enteros no nulos, cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia.

I. $x \sim y \Leftrightarrow xy > 0$

II. $x \sim y \Leftrightarrow x \text{ divide a } y$

III. $x \sim y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ dejan el mismo residuo al dividirlo entre 4}$

Resolución

I. $\forall x \in \mathbb{Z} - \{0\}; x \sim x \Leftrightarrow x^2 > 0$ **es reflexiva**

$x \sim y \Leftrightarrow xy > 0$ entonces $yx > 0 \Leftrightarrow y \sim x$ **es simétrica**

$$\left. \begin{array}{l} x \sim y \Leftrightarrow xy > 0 \\ y \sim z \Leftrightarrow yz > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Multiplicando: } xy^2z > 0 \text{ como } y^2 > 0 \\ \text{entonces } xz > 0 \Leftrightarrow x \sim z \end{array} \text{ **es transitiva**}$$

Por lo tanto es una relación de equivalencia

II. No es simétrica $2 \sim 16 \Leftrightarrow 2 \text{ divide a } 16$
pero $16 \not\sim 2$ pues 16 no divide a 2

Por lo tanto no es una relación de equivalencia

III. $x \sim x \Leftrightarrow x = \dot{4} + r \wedge x = \dot{4} + r$ **es reflexiva**

$$x \sim y \Leftrightarrow x = \dot{4} + r \wedge y = \dot{4} + r$$

$$<> y = \dot{4} + r \wedge x = \dot{4} + r \Leftrightarrow y \sim x \text{ es simétrica}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \sim y \Leftrightarrow x = \dot{4} + r \wedge y = \dot{4} + r \\ y \sim z \Leftrightarrow y = \dot{4} + r \wedge z = \dot{4} + r \end{array} \right\} x = \dot{4} + r \wedge z = \dot{4} + r \Leftrightarrow x \sim z$$

es transitiva

Por lo tanto es una relación de equivalencia



I y III son relaciones de equivalencia

CLASE DE EQUIVALENCIA

Dada la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ sobre A , para cada $x \in A$ definimos la clase de equivalencia del elemento x como el conjunto

$$[x] = \{a \in A : x\mathcal{R}a\}$$

Observación: Los elementos que pertenecen a la clase de equivalencia se denominan representantes.

Ejemplo:

Sea el conjunto $A = \{2,3,4,5\}$ y la relación de equivalencia sobre A como:
 $\mathcal{R} = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

Escribe las clases de equivalencia de los elementos de A .

$$[2] = \{x \in A / x\mathcal{R}_1 2\} = \{2,3\} = [3]$$

$$[4] = \{x \in A / x\mathcal{R}_1 4\} = \{4\}$$

$$[3] = \{x \in A / x\mathcal{R}_1 3\} = \{2,3\} = [2]$$

$$[5] = \{x \in A / x\mathcal{R}_1 5\} = \{5\}$$

CONJUNTO COCIENTE

Dada la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ sobre A , definamos el conjunto cociente como el conjunto

$$A/\mathcal{R} = \{[x] : x \in A\}$$

Nota:

Se dice que el conjunto $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es una partición del conjunto A , si

- i) $A_i \neq \emptyset, \forall i: 1, 2, \dots, n$
- ii) $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$
- iii) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$

Observación: La relación de equivalencia $\mathcal{R}$ permite particionar el conjunto A en conjuntos disjuntos 2 a 2.

Ejemplo:

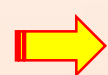
Determine el conjunto cociente para el ejemplo anterior

El conjunto $A = \{2, 3, 4, 5\}$ y sus las clases de equivalencia son:

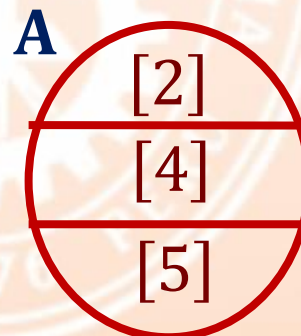
$$[2] = \{2, 3\} = [3]$$

$$[4] = \{4\}$$

$$[5] = \{5\}$$



$$A/\mathcal{R}_1 = \{[2], [4], [5]\}$$



Aplicación 5

Definamos una relación $\equiv$ sobre $\mathbb{Z}$ como:

$$a \equiv b \pmod{4} \text{ si y sólo si } 4 \mid (a - b)$$

Verifique que dicha relación es de equivalencia

Resolución

- **Reflexiva** : $\forall a \in \mathbb{Z}: a \equiv a \pmod{4}$ $\overbrace{4 \mid (a - a)}^0, \forall a \in \mathbb{Z}$ **Verdadero**
- **Simétrica**: Si $a \equiv b \pmod{4}$, entonces $b \equiv a \pmod{4}$
Si $4 \mid (a - b)$ entonces $4 \mid (b - a)$ **Verdadero**
- **Transitiva**: Si $a \equiv b \pmod{4}$ y $b \equiv c \pmod{4}$ entonces $a \equiv c \pmod{4}$
Si $4 \mid (a - b)$ y $4 \mid (b - c)$ entonces $4 \mid \overbrace{[(a - \cancel{b}) + (\cancel{b} - c)]}^{a - c}$ **Verdadero**



$\equiv$ Es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$

Aplicación 6

De la aplicación 5, describe las clases de equivalencia, sus elementos y el conjunto cociente

Resolución

Clases de Equivalencia :

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z}/4 \mid (x - 0)\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\} = [4] = [8] = \dots$$

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z}/4 \mid (x - 1)\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\} = [1] = [5] = \dots$$

$$[2] = \{x \in \mathbb{Z}/4 \mid (x - 2)\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} = [2] = [6] = \dots$$

$$[3] = \{x \in \mathbb{Z}/4 \mid (x - 3)\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} = [3] = [7] = \dots$$

Se concluye:

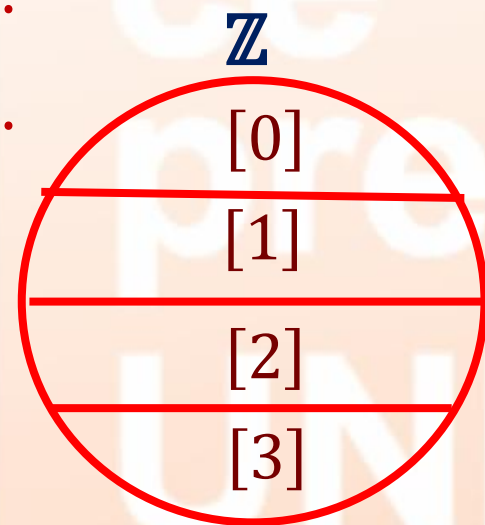
- $[0] = \{4k : k \in \mathbb{Z}\}$
- $[1] = \{4k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$
- $[2] = \{4k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}$
- $[3] = \{4k + 3 : k \in \mathbb{Z}\}$

Conjunto cociente :

$$\frac{\mathbb{Z}}{\equiv} = \{[0], [1], [2], [3]\}$$

Notación:

El conjunto cociente $\frac{\mathbb{Z}}{\equiv}$ se denota por $\mathbb{Z}_3$.



PROPIEDADES

Dada la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ sobre $A \neq \emptyset$, se cumple:

1. $[x] \neq \emptyset, \forall x \in A$
2. Para todo par de elementos $x, y \in A$ se tiene que:

$$[x] = [y] \quad \text{ó} \quad [x] \cap [y] = \emptyset$$

Prueba de la propiedad 2

Caso I: Si $x \mathcal{R} y$

Veamos que $[x] \subset [y]$:

En efecto: Sea $z \in [x]$ entonces $x \mathcal{R} z$, como $\mathcal{R}$ simétrica se tiene $z \mathcal{R} x$, luego $z \mathcal{R} x$ y $x \mathcal{R} y$, por transitividad de $\mathcal{R}$ se tiene que $z \in [y]$. La otra inclusión es similar.

Caso II: Si x *no se relaciona con* y

Supongamos que $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ entonces existe $z \in [x]$ y $z \in [y]$, luego $x \mathcal{R} z$ y $z \mathcal{R} y$, por transitividad de $\mathcal{R}$ se tiene $x \mathcal{R} y$, lo cual es una contradicción.

Aplicación 7

La relación de equivalencia $\sim$ definida sobre el conjunto formado por los 50 primeros números naturales, esta dado por:

$$a \sim b \text{ si y sólo si } CD_{\mathbb{Z}^+}(a) = CD_{\mathbb{Z}^+}(b).$$

Determine el número cardinal del conjunto P , si

$$P = [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4] \cup [5]$$

Resolución

$$[1] = \{a/a \sim 1 \Leftrightarrow CD_{\mathbb{Z}^+}(a) = CD_{\mathbb{Z}^+}(1) = 1\} \rightarrow [1] = \{1\} \quad \text{Un elemento}$$

$$[2] = \{a/a \sim 2 \Leftrightarrow CD_{\mathbb{Z}^+}(a) = CD_{\mathbb{Z}^+}(2) = 2\} \rightarrow a \text{ es primo}$$

$$[2] = \underbrace{\{2, 3, 5, \dots, 47\}}_{15 \text{ elementos}} = [3] = [5]$$

$$[4] = \{a/a \sim 4 \Leftrightarrow CD_{\mathbb{Z}^+}(a) = CD_{\mathbb{Z}^+}(4) = 3\} \rightarrow a \text{ es un cuadrado}$$

$$[4] = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \quad 4 \text{ elementos}$$

Por lo tanto

$$n(P) = 1 + 15 + 4 = 20$$

CONSTRUCCIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Definamos la relación $\sim$ sobre $\mathcal{F} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, el conjunto de todas las fracciones como: $(a, b) \sim (c, d)$ si y sólo si $a \cdot d = b \cdot c$

Veamos que dicha relación es de equivalencia:

- Reflexiva**

$$(a, b) \sim (a, b) \leftrightarrow a \cdot b = b \cdot a, \forall (a, b) \in \mathcal{F}$$

Verdadero

- Simétrica**

$$\text{Si } \underbrace{(a, b) \sim (c, d)}_{ad = bc} \text{ entonces } \underbrace{(c, d) \sim (a, b)}_{cb = bc = ad = da}$$

Verdadero

- Transitiva**

$$\text{Si } \underbrace{(a, b) \sim (c, d)}_{ad = bc} \text{ y } \underbrace{(c, d) \sim (e, f)}_{cf = de} \text{ entonces } \underbrace{(a, b) \sim (e, f)}_{af = a \cdot \frac{d}{d} \cdot f = \frac{bcf}{d} = be}$$

Verdadero

Observación:

La notación :

$$(a, b) = \frac{a}{b}$$

Se denomina fracción

CLASE DE EQUIVALENCIA

La relación de equivalencia $\sim$ permite construir las clases de equivalencia sobre $\mathcal{F} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$:

$$[(a, b)] = \{(c, d) \in \mathcal{F} : (a, b) \sim (c, d)\}$$

REPRESENTANTE CANÓNICO

Decimos que $(p, q) \in [(a, b)]$ es el representante canónico de la clase de equivalencia $[(a, b)]$ si p y q son PESI y $q > 0$.

Ejemplo:

- $[(10, -15)] = \{(-2k, 3k) : k \in \mathbb{Z}^*\}$ posee como representante canónico a $(-2, 3)$.
- Representante canónico de $[(0, 12)]$ es $(0, 1)$.

Observación:

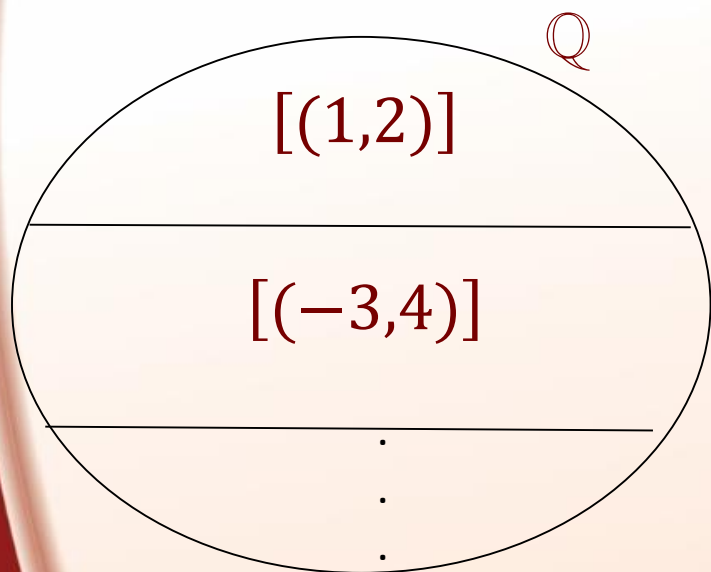
El representante canónico es único.

NÚMEROS RACIONALES

Definamos el conjunto de los números racionales como el conjunto cociente:

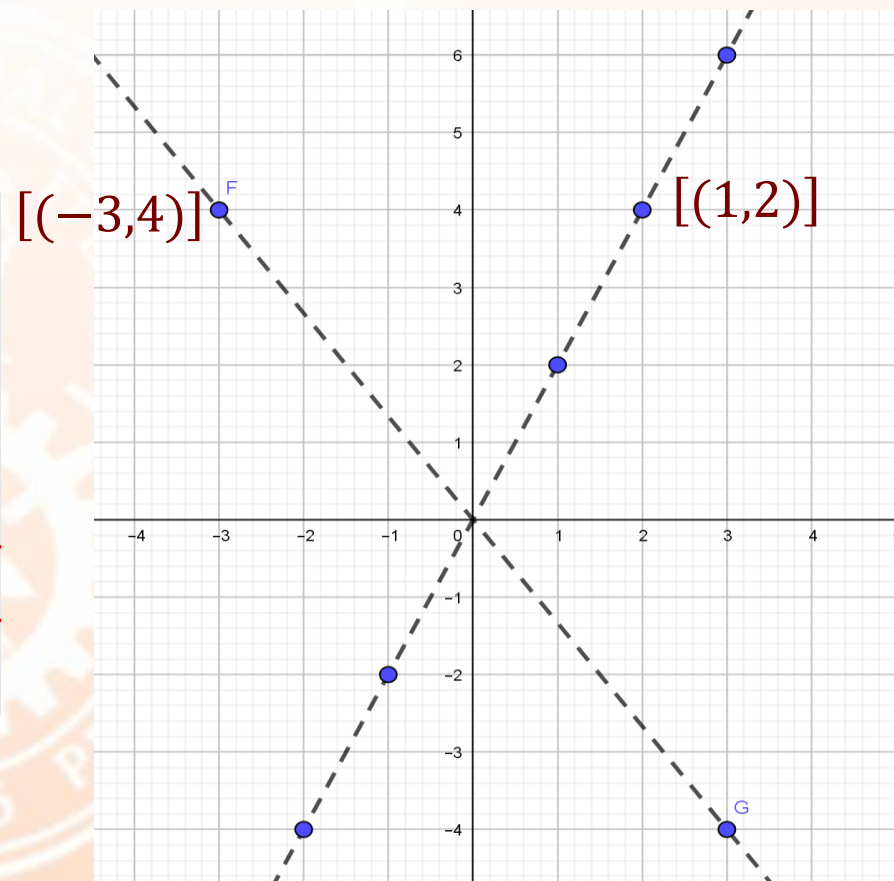
$$\mathbb{Q} := \mathcal{F} / \sim = \{[(a, b)] : (a, b) \in \mathcal{F}\}$$

Gráficamente



Observación:

Los elementos que pertenecen a la clase $[(a, b)]$ son puntos que pertenecen a una misma recta que pasa por el origen.



Aplicación 8

Con respecto a la construcción de los números racionales, se puede afirmar:

- I. $\mathbb{Q} = \{[(a, b)]: (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \wedge MCD(a, b) = 1\}.$
- II. $\mathbb{Q} = \{[(a, b)]: (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \wedge a \times b \geq 0\}.$
- III. $\mathbb{Q} = \{[(a, b)]: (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \wedge (a \times b \geq 0 \vee a \times b < 0)\}.$

Resolución

- I. Sea el conjunto $A = \{[(a, b)]: (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \wedge MCD(a, b) = 1\}$

- Es claro que $A \subset \mathbb{Q}$
- ¿ $\mathbb{Q} \subset A$? Si

Sea $[(m, n)] \in \mathbb{Q}$ entonces existe un representante canónico $(x, y) \in [(m, n)]$, luego como $MCD(x, y) = 1$

$$\Rightarrow [(x, y)] = [(m, n)] \in A \Rightarrow \mathbb{Q} \subset A$$

Por tanto, $A = \mathbb{Q}$

II. Sea el conjunto $B = \{[(a, b)]: (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \wedge a \times b \geq 0\}$

- Es claro que $B \subset \mathbb{Q}$

- ¿ $\mathbb{Q} \subset B$? No

$[(-1, 2)] \in \mathbb{Q}$ pero no pertenece a B

Por tanto, $B \neq \mathbb{Q}$

III. Sea el conjunto $C = \{[(a, b)]: (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \wedge (a \times b \geq 0 \vee a \times b < 0)\}$

- Es claro que $C \subset \mathbb{Q}$

- ¿ $\mathbb{Q} \subset C$? Si

Sea $[(m, n)] \in \mathbb{Q}$ entonces $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

Entonces $m \times n \geq 0 \vee m \times n < 0 \Rightarrow \mathbb{Q} \subset C$

Por tanto, $C = \mathbb{Q}$

Aplicación 9

Se tiene dos clases de equivalencia: $\left[\frac{1}{1}\right]$ y $\left[\frac{a}{5}\right]$, $0 < a < 5$; luego se trazan las rectas que pasan por ellas, hasta los puntos $A(15;15)$ y $B(x_0;15)$ respectivamente, formándose el triángulo AOB cuya área es $90u^2$. Luego la clase $\left[\frac{a}{5}\right]$ es:

Resolución

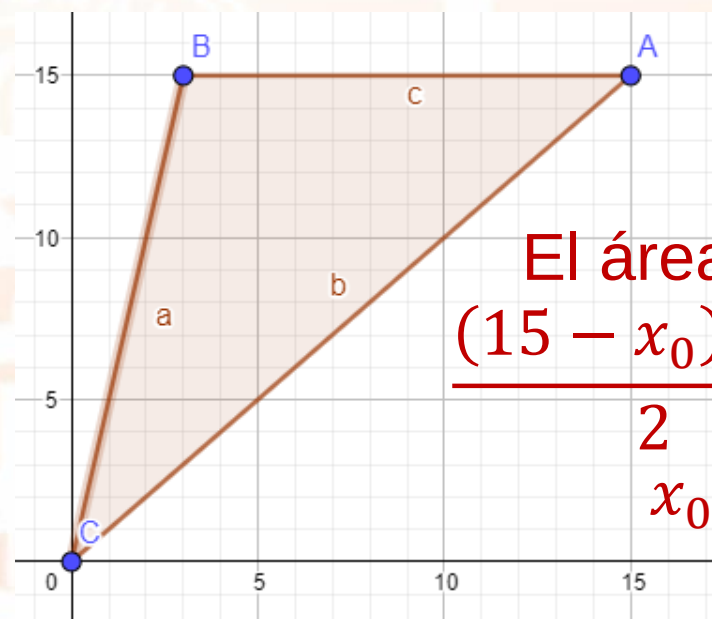
Sean las clases de equivalencia:

$$\left[\frac{1}{1}\right] \text{ y } \left[\frac{a}{5}\right],$$

donde: $0 < a < 5$

$$(15; 15) \in \left[\frac{1}{1}\right]$$

$$(x_0; 15) \in \left[\frac{a}{5}\right] \rightarrow \frac{x_0}{15} = \frac{a}{5}$$



$$\begin{aligned} \text{El área es:} \\ \frac{(15 - x_0)(15)}{2} &= 90 \\ x_0 &= 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \left[\frac{a}{5}\right] = \left[\frac{x_0}{15}\right] = \left[\frac{3}{15}\right] = \left[\frac{1}{5}\right]$$

Aplicación 10

Un elemento de la clase de equivalencia $\left[\frac{5}{17}\right]$ es de la forma $\overline{\overline{\frac{abc}{cba}}}$.
Determine el valor de $a^2 + b^2 + c^2$.

Resolución

$$\overline{\overline{\frac{abc}{cba}}} = \frac{5k}{17k} \Rightarrow \overline{cba} - \overline{abc} = 12k \Rightarrow \overset{33}{\cancel{99}}(c - a) = \overset{4}{\cancel{12}}k$$

$$\Rightarrow k = \overset{\circ}{33} = 33 \quad \begin{cases} \overline{abc} = 5 \times 33 = 165 \\ \overline{cba} = 17 \times 33 = 561 \end{cases}$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 6^2 + 5^2 = \mathbf{62}$$

Aplicación 11

Sean las clases de equivalencia de números racionales $\left[\frac{a}{b}\right]; \left[\frac{m}{n}\right]$ y $\left[\frac{r}{s}\right]$

Dadas las siguientes proposiciones:

I. Si $\left[\frac{a}{b}\right] \cap \left[\frac{m}{n}\right] = \emptyset$, entonces $an = bm$

II. Si $\left[\frac{a}{b}\right] \cap \left[\frac{m}{n}\right] \neq \emptyset$, entonces $\frac{n}{b} = \frac{m}{a}$.

III. Si $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{r}{s}\right]$, entonces $\frac{an+bm}{bn} \in \left[\frac{r}{s}\right]$

¿cuáles son correctas? (UNI 2018 II)

- A) solo I B) solo II C) solo III D) II y III E) I y III

Resolución

I) $\left[\frac{a}{b}\right] \neq \left[\frac{m}{n}\right] \Rightarrow an \neq bm$ (F)

II) $\left[\frac{0}{4}\right] = \left[\frac{0}{8}\right] \Rightarrow \frac{8}{4} \neq \frac{0}{0}$ (F)

III) $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{an+bm}{bn}\right] = \left[\frac{r}{s}\right]$

$\frac{an+bm}{bn} \in \left[\frac{r}{s}\right]$ (V)

CLAVE C

OPERACIONES SOBRE $\mathbb{Q}$

Adición

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc; bd)]$$

Ejemplo:

- $[(5, -3)] + [(-4, 7)] = [(47, -21)]$

Multipliación

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(a \cdot c; b \cdot d)]$$

Ejemplo:

- $[(-2, -7)] \cdot [(3, -4)] = [(-6, 28)]$

Observación:

Las operaciones de sustracción y división de números racionales son una consecuencia de la adición y multiplicación.

¿QUÉ RELACIÓN EXISTE ENTRE $\mathbb{Z}$ Y $\mathbb{Q}$?

Es claro que, al considerar a $\mathbb{Q}$ como un conjunto formado por clases de equivalencias, este no contiene a $\mathbb{Z}$, pero si se considera el conjunto

$$A = \{[(a, 1)]: a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}$$

Se observa que este puede ser identificado por $\mathbb{Z}$, es decir:

Existe una función biyectiva

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [(a, 1)] &\rightarrow a \end{aligned}$$

Esto nos permite identificar a todos los números racionales $[(a, b)]$ como el cociente de los números enteros a y b , para así ser ubicados en la recta numérica. Luego se concluye que visto $\mathbb{Q}$ como puntos sobre la recta numérica, este contendría a $\mathbb{Z}$.

DENSIDAD DE UN CONJUNTO EN $\mathbb{R}$

Decimos que el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$, si para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe un $z \in A$ tal que $x < z < y$.

TEOREMA:

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Prueba:

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ entonces $\frac{1}{y-x} > 0$.

Como el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente

➡ $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{y-x}$, así $ny - nx > 1$.

Es decir el intervalo $[nx, ny]$ posee una longitud mayor que 1, luego $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $nx < m < ny$.

Por lo tanto $\exists \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $x < \frac{m}{n} < y$.

PROPIEDADES

1. La cantidad de números racionales e irracionales que se encuentra en cualquier intervalo $]a, b[$ es infinita.
2. El complemento de todo conjunto finito $A \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$.
3. Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto denso en $\mathbb{R}$ entonces todo conjunto B que contiene a A y esta contenido en $\mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$.
4. El conjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto denso en $\mathbb{R}$ y es infinito. Entre dos racionales existe siempre otro racional, y todo intervalo contiene infinitos números racionales.
5. Todo número real es el límite de alguna sucesión de números racionales.

Aplicación 12

Indicar la veracidad de las siguientes proposiciones:

- I.- Existen sólo dos conjuntos densos en $\mathbb{R}$ que son $\mathbb{Q}$ y I .
- II.- Si A es denso en $\mathbb{R}$, entonces el complemento de A es diferente del vacío.
- III.- Si A y B son densos en $\mathbb{R}$, entonces $A \cap B$ es denso en $\mathbb{R}$.

Resolución

- I.- Falso Existen más de dos conjuntos; por ejemplo $\mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$
- II.- Falso Para $A = \mathbb{R}$, se tiene $A^c = \emptyset$
- III.- Falso Para $A = \mathbb{Q}$ y $B = I$ se tiene $A \cap B = \emptyset$ que no es denso en $\mathbb{R}$



ce
pre
UNI

Artes y
Ciencias

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ce
pre
UNI

PROBLEMA 212

Dado el conjunto $A = \{3,5,7\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones

$R_1 = \{(3,3), (5,5)\}$ es una relación simétrica.

$R_2 = \{(3,3), (5,5), (7,3)\}$ es una relación reflexiva o transitiva.

$R_3 = \{(3,3), (5,5), (7,7)\}$ es una relación reflexiva, pero no transitiva.

(6PC- 2023-I)

A) VVV

B) VVF

C) VFF

D) FVV

E) FFV

Resolución

PROBLEMA 215

Sean las relaciones definidas sobre $\mathbb{Z}^*$:

I. $x \sim y \leftrightarrow x \cdot y > 0$.

II. $x \sim y \leftrightarrow x^2 = y^2$.

III. $x \sim y \leftrightarrow CD(x) = CA(y)$.

Escribe V en caso dicha relación defina una relación de equivalencia, caso contrario coloque F.

A) VVV

B) FVF

C) VFV

D) FVV

E) FFF

Resolución

PROBLEMA 217

Si $\frac{18}{n}$ y $\frac{n}{8}$ pertenecen a la clase de equivalencia $\left[\overline{\frac{6a}{b6}}\right]$, determine el valor de $a + b + n$.

A) 20

B) 21

C) 24

D) 25

E) 26

Resolución

PROBLEMA 218

En el conjunto de los números naturales, definimos la siguiente relación

$$a\mathcal{R}b \leftrightarrow MCD(a, 6) = MCD(b, 6)$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones

I. $\mathcal{R}$ es reflexiva y simétrica pero no transitiva.

II. $\mathcal{R}$ es solo reflexiva.

III. $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

A) VFV

B) FVV

C) VFF

D) FFF

E) FFV

Resolución

PROBLEMA 220

Determine la diferencia de los términos de la fracción perteneciente a $\left[\frac{1\ 265}{2\ 024}\right]$ tal que la suma de sus términos es múltiplo de 7, siendo el denominador un número capicúa.

A) 123

B) 144

C) 171

D) 213

E) 231

Resolución

PROBLEMA 221

Dos elementos de la clase de equivalencia $\left[\frac{2a+3}{2a} \right]$ son $\frac{\overline{4a}}{a^4}$ y $\frac{\overline{ac}}{ba}$. Determine el valor de $a + b + c$.

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

Resolución

PROBLEMA 224

Las gráficas de las clases de equivalencia $[(n, n - 2)]$ y $[(n - 6, n)]$, están contenidas en dos rectas que son perpendiculares, además $n \in \mathbb{N}, n \neq 6$. Si (a, b) es el representante canónico de $[(n, n + 2)] + [(n - 8, n - 1)]$. Determine el valor de $a + b$.

- A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 3

Resolución

PROBLEMA 227

Se define las relaciones sobre el conjunto de alumnos del Cepre-Uni:

- I. Dos alumnos se relacionan si tienen el mismo número de hermanos.
- II. Dos alumnos se relacionan si postulan a la misma facultad.
- III. Dos alumnos se relacionan si les gusta el mismo curso.

Escribe V en caso dicha relación defina una relación de equivalencia, caso contrario coloque F.

A) VVV

B) VVF

C) VFF

D) FFV

E) FVV

Resolución



ce
pre
UNI

PROBLEMA 229

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Si $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ y $[y] \cap [z] = \emptyset$, entonces $[x] \cap [z] \neq \emptyset$.

II. Si $[x] \cap [y] = [z]$ entonces $[y] \cap [z] \neq \emptyset$.

III. Si $y \notin [z]$ y $z \in [x]$ entonces $x \notin [y]$.

A) I y III B) Sólo II C) Sólo III D) II y III E) Todas

Resolución

ce
pre
UNI

PROBLEMA 232

Si $\frac{m}{n}$ es el representante canónico de $\left[\frac{\overline{ab}}{-ba}\right]$ y $\frac{a}{-m}$ es el representante canónico de $\left[\frac{6.n}{ba}\right]$ siendo b un número impar, determine el valor de $a + b + m + n$.

A) 13

B) 14

C) 15

D) 18

E) 20

Resolución

PROBLEMA 234

Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. Si el conjunto A es denso en $\mathbb{R}$, además $A \cup B = \mathbb{R}$, entonces B es denso en $\mathbb{R}$.

II. El complemento del conjunto $B = \{M \in \mathbb{N} / M < 999 \text{ y } CA(M) = 2\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

III. Si $A \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$, además $B^C \subset A^C$ donde B esta contenido en $\mathbb{R}$, entonces B es denso en $\mathbb{R}$.

A) VVV

B) VFV

C) FVV

D) FVF

E) FFF

Resolución

PROBLEMA 241

Sea $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$. Dada la relación $\sim$ definida sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ como:

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c,$$

con: (a, b) y $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

$(1,4), (1,6), (1,8)$ pertenecen a una misma clase de equivalencia.

El gráfico de la clase de equivalencia $\left[\frac{p}{q}\right]$ con $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ es una recta.

En las clases de equivalencias:

$$\left(\left[\frac{m}{n}\right] \cap \left[\frac{p}{q}\right] \neq \emptyset\right) \rightarrow \left[\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{p}{q}\right]; \quad (m, n, p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } n, q \neq 0). \quad (\text{UNI 2023-I})$$

A) FFV

B) FVF

C) VVF

D) VFV

E) VFF

Resolución